***Вторая производная функции***

***Определение 3.*** Если у [функции](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function.htm#f1)   *y = f* (*x*)   существует [производная](https://www.resolventa.ru/spr/matan/tangent.htm#derivative1) в некоторой точке   *x*0 ,   то эту производную часто называют ***первой производной*** или ***производной первого порядка*** функции   *y = f* (*x*)   в точке   *x*0 .

      Пусть у функции   *y = f* (*x*)   существует производная во всех точках вторая производная функции. Тогда, вычисляя в каждой точке вторая производная функциипроизводную   *f '* (*x*),   мы получим функцию   *y = f '* (*x*).   Если у функции   *y = f '*(*x*)   существует производная в некоторой точке   *x*0   интервала   (*a, b*),   то эту производную называют ***второй производной*** или ***производной второго порядка*** функции   *y = f* (*x*)   в точке   *x*0 .

      Для производной второго порядка   *y = f* (*x*)   используются **обозначения**:

вторая производная функции

      Например,

вторая производная функции

      Точно так же, как это было сделано при определении второй производной функции   *f* (*x*),   можно определить и ***производные более высоких порядков: третью производную, четвертую производную*** и т.д. (конечно же, при условии, что они существуют).

***Достаточные условия выпуклости вверх и выпуклости вниз функции***

      При исследовании направления выпуклости функции ([выпуклость вверх](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd1) или [выпуклость вниз](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2)) важную роль играет [вторая производная](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd3) этой функции.

***Утверждение 1.*** Если функция   *f* (*x*)   имеет на интервале   (*a, b*)   вторую производную, причем для всех достаточные условия выпуклости вверх выпуклости внизвыполнено условие

*f ''* (*x*) > 0 ,

то функция   *f* (*x*)   выпукла вниз на интервале   (*a, b*).

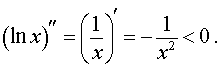
***Утверждение 2.*** Если функция   *f* (*x*)   имеет на интервале   (*a, b*)   вторую производную, причем для всех достаточные условия выпуклости вверх выпуклости внизвыполнено условие

*f ''* (*x*) < 0 ,

то функция   *f* (*x*)   выпукла вверх на интервале   (*a, b*).

      Доказательства утверждений 1 и 2 выходят за рамки школьного курса математики и здесь не приводятся.

***Пример 3.*** Функция   *y* = ln*x*   на интервале достаточные условия выпуклости вверх выпуклости внизудовлетворяет условию



      В силу [утверждения 2](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd9) отсюда следует, что функция   *y* = ln*x*   [выпукла вверх](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd1) (рис. 5) на всей своей [области определения](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function.htm#f1) достаточные условия выпуклости вверх выпуклости вниз.

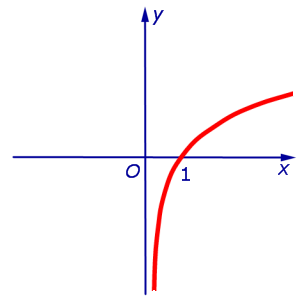


Рис.5

***Пример 4.*** Функция   *y = ex*   на интервале достаточные условия выпуклости вверх выпуклости внизудовлетворяет условию

достаточные условия выпуклости вверх выпуклости вниз

и, в силу [утверждения 1,](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd8) функция   *y = ex*   [выпукла вниз](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2) (рис. 6) на всей своей [области определения](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function.htm#f1) достаточные условия выпуклости вверх выпуклости вниз.

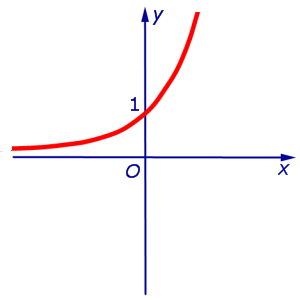


Рис.6

***Точки перегиба***

***Определение 4.*** Пусть [функция](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function.htm#f1)   *y = f* (*x*)   определена на некотором интервале   (*a, b*) ,   содержащем точку   *x*0 .   Говорят, что при переходе через точку   *x*0   функция   *f* (*x*)   ***меняет направление выпуклости,*** если на одном из интервалов

(*a*, *x*0)   и   (*x*0,  *b*)

функция [выпукла вверх,](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd1) а на другом – [выпукла вниз.](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2)

***Определение 5.*** Пусть [функция](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function.htm#f1)   *y = f* (*x*)   определена на некотором интервале   (*a, b*) ,   содержащем точку   *x*0 , а у [графика функции](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function_property.htm#fpr6)   в точке   (*x*0;  *f (x*0))   существует [касательная](https://www.resolventa.ru/spr/matan/tangent.htm#tangent1). Если функция   *f* (*x*)   при переходе через точку   *x*0   **меняет направление выпуклости**, то точку   *x*0   называют ***точкой перегиба*** функции   *f* (*x*) .

***Замечание 1 .*** Если   *x*0   – точка перегиба функции   *y = f* (*x*),   то график функции   *y = f* (*x*)   при переходе через точку   *x*0   **переходит с одной стороны** от **касательной** в точке   (*x*0;  *f (x*0))   **на другую сторону** от касательной, то есть **«перегибается»** через касательную.

***Пример 5.*** Рассмотрим функцию   *y = x*3,   [график](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function_property.htm#fpr6) которой изображен на рисунке 7.

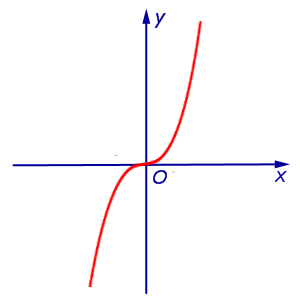


Рис.7

      Поскольку

*y* (0) = 0,   *y'* (0) = 0,

то прямая   *y* = 0   ([ось абсцисс](https://www.resolventa.ru/demo/him/diagege.htm#kvd1)   *Ox* )   является [касательной](https://www.resolventa.ru/spr/matan/tangent.htm#tangent1) к графику функции   *y = x*3   в точке   (0; 0).

      Кроме того,

точка перегиба

      Поэтому   *y"* > 0   при   *x* > 0   и   *y"* < 0   при   *x* < 0 .   Таким образом, функция   *y = x*3   [выпукла вверх](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd1) при   *x* < 0   и [выпукла вниз](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2) при   *x* > 0 ,   и точка   *x* = 0   является **точкой перегиба графика** функции   *y = x*3.   График функции   *y = x*3   при переходе через точку   *x* = 0   переходит из нижней полуплоскости в верхнюю полуплоскость, то есть **«перегибается»** через касательную   *y* = 0 .

***Необходимые условия для существования точки перегиба***

***Утверждение 3.*** Если точка   *x*0   является [точкой перегиба](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd5) графика функции   *f* (*x*),   то в точке   *x*0   либо [вторая производная](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd3)   *f ''* (*x*) = 0 ,   либо   *f ''* (*x*)   не существует.

***Замечание 2.*** Условия существования точки перегиба, сформулированные в утверждении 3, являются необходимыми, но **не являются достаточными**.

      Действительно, рассмотрим функцию   *y = x*4,   [график](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function_property.htm#fpr6) которой изображен на рисунке 8.

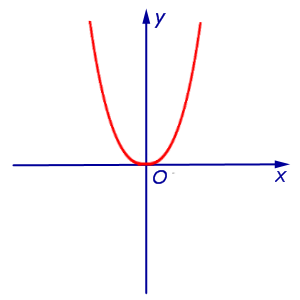


Рис.8

      Вычисляя [вторую производную](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd3) этой функции

необходимое условие точки перегиба

замечаем, что   *y ''* (0) = 0 ,   однако точка   *x* = 0   **не является точкой перегиба** графика функции   *y = x*4,   так как функция   *y = x*4   [выпукла вниз](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2), как при   *x* < 0 ,   так и при   *x* > 0 .

***Достаточные условия для существования точки перегиба***

***Утверждение 4.*** Пусть [функция](https://www.resolventa.ru/spr/matan/function.htm#f1)   *y = f* (*x*)   определена на некотором интервале   (*a, b*) ,   содержащем точку   *x*0 , имеет первую [производную](https://www.resolventa.ru/spr/matan/tangent.htm#derivative1) в каждой точке интервала   (*a, b*)   и имеет [вторую производную](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd3) в каждой точке интервала   (*a, b*)   за исключением, быть может, самой точки   *x*0 .

      Если для точек достаточные условия точки перегибавыполнено условие:

*f ''* (*x*) > 0   при   *x < x*0   и   *f ''* (*x*) < 0   при   *x > x*0 ,

либо выполнено условие:

*f ''* (*x*) < 0   при   *x < x*0   и   *f ''* (*x*) > 0   при   *x > x*0,

то точка   *x*0   является [точкой перегиба](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd5) графика функции   *f* (*x*).

      Другими словами, точка   *x*0   является [точкой перегиба](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd5) графика функции   *f* (*x*),   если при переходе через точку   *x*0   [вторая производная](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd3) функции меняет свой знак.

***Пример 6.*** Найти интервалы, на которых функция

*y* (*x*) = *x*4 – 6*x*3 + 12*x*2

[выпукла вверх](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd1), а также интервалы, на которых эта функция [выпукла вниз](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2). Определить [точки перегиба](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd5).

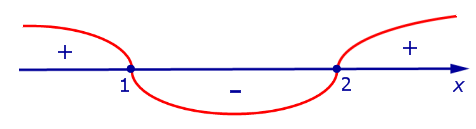
***Решение.*** Вычислим [вторую производную](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd3) функции:

*y'* (*x*) = 4*x*3 – 18*x*2 + 24*x* ,

*y''* (*x*) = 12*x*2 – 36*x* + 24 = 12(*x*2 – 3*x* + 2) = 12(*x* – 1) (*x* – 2) .

*y''* (*x*) = 12*x*2 – 36*x* + 24 =  
= 12(*x*2 – 3*x* + 2) =  
= 12(*x* – 1) (*x* – 2) .

      Отсюда вытекает, что вторая производная существует во всех точках достаточные условия точки перегибаи обращается в нуль в точках   *x* = 1   и   *x* = 2 . Воспользуемся [методом интервалов](https://www.resolventa.ru/demo/rus/trgia.htm) и изобразим на рисунке 9 диаграмму знаков второй производной   *y"* (*x*)



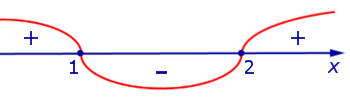


Рис.9

      При переходе через точку   *x* = 1   вторая производная функции   *y"* (*x*)   меняет знак с   «+»   на   «–» . Следовательно,   *x* = 1   – [**точка перегиба**](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd5) **графика функции**.

      При переходе через точку   *x* = 2   вторая производная функции   *y"* (*x*)   меняет знак с   «–»   на   «+» . Следовательно,   *x* = 2   также является [**точкой перегиба**](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd5) **графика функции**.

      При достаточные условия точки перегибаи при достаточные условия точки перегибавторая производная функции   *y"* (*x*) > 0,   [следовательно,](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd8) функция   *y* (*x*)   [выпукла вниз](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd2) на этих интервалах.

      При достаточные условия точки перегибавторая производная функции   *y"* (*x*) < 0,   [следовательно](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd9), функция   *y* (*x*)   [выпукла вверх](https://www.resolventa.ru/spr/matan/second_derivative.htm#sd1) на интервале   (1, 2) .

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Найдите вторую производную функции y = ex − x ex.

2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

y = x3 + 3x2

**Задания выслать по тел.89233340020 либо на эл. адрес:zinevich1957@mail.ru**

**до 24.03.2020года.**