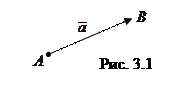
***Векторы и линейные операции над векторами. Разложение векторов***

***Определение 3.1 Вектором*** (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и направление.

**В**екторы рассматриваются на плоскости (двумерные) и в пространстве (трехмерные). И в том, и в другом случае вектор определяется упорядоченной парой точек, первая из которых – ***начало***вектора, другая – ***конец***вектора. Для обозначения векторов используются символы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image006.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image008.gif . Если http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image010.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image012.gif соответственно точки начала и конца вектора, то этот вектор обозначается http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image014.gif (Рис. 3.1). Вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image016.gif с началом в точке http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image012.gif и концом в точке http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image010.gif называет противоположным вектору http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image014.gif .

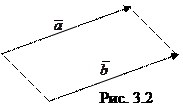


**Длиной** или ***модулем*** http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image025.gif вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image014.gif называется число, равное длине отрезка http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image028.gif , изображающего вектор. Векторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image014.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image016.gif имеют один и тот же модуль.

**Нулевым вектором** называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нуль-вектор обозначается символом http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image032.gif . Модуль нулевого вектора равен нулю.

**Единичным вектором** называет вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , называется ***ортом***вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и обозначается http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image034.gif .

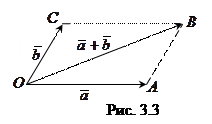
**Д**ва ненулевых вектора называются ***равными***, если один из них путем параллельного переноса можно совместить с другим так, что совпадут их начала и концы (рис 1.2). Обозначают http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image036.gif .



**С** точки зрения векторной алгебры вектор не меняется при его параллельном переносе с сохранением его длины и его направления, то есть точку приложения вектора можно помещать в любую точку пространства. Такие векторы называются ***свободными.***

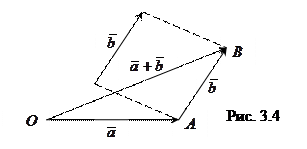
***Линейными операциями*** над векторами называются операции сложение, вычитание и умножение вектора на число.

**Сложение двух векторов**http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif можно выполнить с помощью ***правила параллелограмма***. Если отложить векторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif от общей точки http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image042.gif и построить на них как на сторонах параллелограмм, то вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image044.gif , идущий из общего начала http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image042.gif в противоположную вершину параллелограмма, будет их суммой http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image046.gif (рис. 3.3).



**Д**ля построения суммарного вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image044.gif не обязательно строить весь параллелограмм http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image057.gif , достаточно построить треугольник http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image059.gif . Сформулированное правило определения суммы можно заменить более удобным.

**Суммой двух векторов** http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif называется вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif с концом второго при условии, что начало второго слагаемого совмещено с концом первого (рис. 3.4).

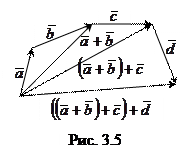
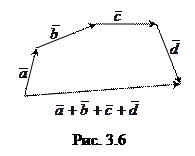


**П**ри этом ясно, что результат сложения не зависит от того, в какой точке пространства начало первого слагаемого: при её изменении весь треугольник параллельно переносится. Это правило сложения векторов называется ***правилом треугольника***.

**С**ложение многих векторов http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image008.gif совершается последовательно: сначала складывается первый вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif со вторым http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , затем к их сумме прибавляется третий вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif , затем к полученной сумме http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image076.gif прибавляется вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif и т.д. (рис. 3.5).

**Н**епосредственно видно, что получается следующее правило для сложения векторов.

**Правило многоугольника**. Суммой нескольких векторов является вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдущего (рис. 3.6).

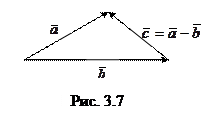
**Законы сложения векторов:**

1. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image088.gif ,

2. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image090.gif ,

3. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image092.gif .

**Разностью двух векторов** http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif называется вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image094.gif , который при сложении с вектором http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif даёт вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif (рис. 3.7).



**З**аметим, что если на векторах http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , отложенных от общего начала, можно построить параллелограмм, то одна направленная диагональ является суммой векторов, а другая разностью.

**Произведением ненулевого вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif на число http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image098.gif**называется вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image100.gif (или http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image102.gif ), длина которого равна http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image104.gif , а направление совпадает с направлением вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , при http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image107.gif и противоположно ему при http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image109.gif .

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image110.gif Например, если дан вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image112.gif , то векторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image114.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image116.gif имеют вид http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image118.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image119.gif http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image121.gif .

**Законы умножения вектора на число:**

1. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image123.gif ,

2. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image125.gif ,

3. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image127.gif ,

4. http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image129.gif .

**И**з определения произведения вектора на число следует, что всякий вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif может быть представлен в виде произведения модуля вектора на орт этого вектора.

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image132.gif (3.1)

**Е**сли над векторами http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif выполнять действия сложения, вычитания и умножения на число, то в результате любого числа таких действий получится вектор вида

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image134.gif ,

представляющий собой ***линейную комбинацию*** исходных векторов.

**В**екторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif называются ***линейно зависимыми*** (связанными линейной зависимостью), если между ними выполняется соотношение следующего вида:

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image136.gif , (3.2)

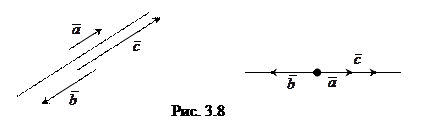
где скалярные коэффициенты http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image138.gif не все равны нулю.

**Е**сли все коэффициенты равны нулю, то соотношение (3.2) будет выполняться, но оно не будет устанавливать зависимости между векторами. Про векторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif , http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif говорят, что они ***линейно независимые***.

**П**онятие линейной независимости между векторами используется для алгебраической характеристики взаимного расположения векторов в пространстве.

**Определение 3.2** Два ненулевых вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif называются ***коллинеарными*** (обозначают http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image140.gif ), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

**К**оллинеарные векторы могут быть одинаково направленными (как векторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif ) или противоположно направленными (векторы http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif (рис 3.8)).



**Теорема 3.1**Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image152.gif

**Следствие.** Если между двумя неколлинеарными векторами выполняется равенство

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image154.gif ,

то оба коэффициента должны равняться нулю http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image156.gif .

**Определение 3.3** Ненулевые векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

**Л**юбые ***два вектора всегда компланарны***, а три вектора могут и не быть компланарными.

**Теорема 3.2** Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image158.gif - коллинеарны http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image160.gif (3.3)

**П**редставление вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif в виде линейной комбинации векторов http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image002.gif и http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image004.gif по (3.3) называется разложением http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif на плоскости по двум неколлинеарным векторам.

**Р**ассмотрим произвольный вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif и тройку некомпланарных векторов http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image158.gif .

**Теорема 3.3**Каждый вектор http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif единственным образом разлагается по трем некомпланарным векторам http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image158.gif , т.е. представляется в виде

http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image167.gif (3.4)

**И**з (3.4) следует, что ***любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы***.

**У**порядоченная тройка некомпланарных (линейно независимых) векторов http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image169.gif называется ***базисом во множестве геометрических векторов пространства***. Скалярные коэффициенты http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image171.gif однозначно определяются и называются ***координатами вектора*** http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image073.gif относительно базиса http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image169.gif .

**А**налогично: упорядоченная пара http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image174.gif неколлинеарных (линейно независимых) векторов образует базис геометрических векторов на плоскости. Коэффициенты http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image176.gif в разложении (3.4) есть координаты вектора http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image071.gif относительно базиса http://konspekta.net/wikipagecomua/baza1/849361041836.files/image174.gif

**ЗАДАНИЯ:**

1. Законспектировать данный материал.

2. Нарисовать 5 произвольных векторов, построить сумму 2-х векторов

по правилу треугольника и по правилу параллелограмма, построить вектор суммы 5 векторов по правилу многоугольника, построить вектор разности любых двух векторов.

Конспект и практическое задание выслать по эл. адресу**:** [**zinevich1957@mail.ru**](mailto:zihevich1957@mail.ru)до 27 марта 12020 года