***Векторы и линейные операции над векторами. Разложение векторов***

***Определение 3.1 Вектором*** (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и направление.

**В**екторы рассматриваются на плоскости (двумерные) и в пространстве (трехмерные). И в том, и в другом случае вектор определяется упорядоченной парой точек, первая из которых – ***начало***вектора, другая – ***конец***вектора. Для обозначения векторов используются символы  ,  ,  ,  . Если  и  соответственно точки начала и конца вектора, то этот вектор обозначается  (Рис. 3.1). Вектор  с началом в точке  и концом в точке  называет противоположным вектору  .



**Длиной** или ***модулем***  вектора  называется число, равное длине отрезка  , изображающего вектор. Векторы  и  имеют один и тот же модуль.

**Нулевым вектором** называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нуль-вектор обозначается символом  . Модуль нулевого вектора равен нулю.

**Единичным вектором** называет вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  , называется ***ортом***вектора  и обозначается  .

**Д**ва ненулевых вектора называются ***равными***, если один из них путем параллельного переноса можно совместить с другим так, что совпадут их начала и концы (рис 1.2). Обозначают  .



**С** точки зрения векторной алгебры вектор не меняется при его параллельном переносе с сохранением его длины и его направления, то есть точку приложения вектора можно помещать в любую точку пространства. Такие векторы называются ***свободными.***

***Линейными операциями*** над векторами называются операции сложение, вычитание и умножение вектора на число.

**Сложение двух векторов** и  можно выполнить с помощью ***правила параллелограмма***. Если отложить векторы  и  от общей точки  и построить на них как на сторонах параллелограмм, то вектор  , идущий из общего начала  в противоположную вершину параллелограмма, будет их суммой  (рис. 3.3).



**Д**ля построения суммарного вектора  не обязательно строить весь параллелограмм  , достаточно построить треугольник  . Сформулированное правило определения суммы можно заменить более удобным.

**Суммой двух векторов**  и  называется вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора  с концом второго при условии, что начало второго слагаемого совмещено с концом первого (рис. 3.4).



**П**ри этом ясно, что результат сложения не зависит от того, в какой точке пространства начало первого слагаемого: при её изменении весь треугольник параллельно переносится. Это правило сложения векторов называется ***правилом треугольника***.

**С**ложение многих векторов  ,  ,  ,  ,  совершается последовательно: сначала складывается первый вектор  со вторым  , затем к их сумме прибавляется третий вектор  , затем к полученной сумме  прибавляется вектор  и т.д. (рис. 3.5).

**Н**епосредственно видно, что получается следующее правило для сложения векторов.

**Правило многоугольника**. Суммой нескольких векторов является вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдущего (рис. 3.6).

 

**Законы сложения векторов:**

1.  ,

2.  ,

3.  .

**Разностью двух векторов**  и  называется вектор  , который при сложении с вектором  даёт вектор  (рис. 3.7).



**З**аметим, что если на векторах  и  , отложенных от общего начала, можно построить параллелограмм, то одна направленная диагональ является суммой векторов, а другая разностью.

**Произведением ненулевого вектора  на число **называется вектор  (или  ), длина которого равна  , а направление совпадает с направлением вектора  , при  и противоположно ему при  .

 Например, если дан вектор  , то векторы  и  имеют вид  и   .

**Законы умножения вектора на число:**

1.  ,

2.  ,

3.  ,

4.  .

**И**з определения произведения вектора на число следует, что всякий вектор  может быть представлен в виде произведения модуля вектора на орт этого вектора.

 (3.1)

**Е**сли над векторами  ,  ,  ,  выполнять действия сложения, вычитания и умножения на число, то в результате любого числа таких действий получится вектор вида

 ,

представляющий собой ***линейную комбинацию*** исходных векторов.

**В**екторы  ,  ,  ,  называются ***линейно зависимыми*** (связанными линейной зависимостью), если между ними выполняется соотношение следующего вида:

 , (3.2)

где скалярные коэффициенты  не все равны нулю.

**Е**сли все коэффициенты равны нулю, то соотношение (3.2) будет выполняться, но оно не будет устанавливать зависимости между векторами. Про векторы  ,  ,  ,  говорят, что они ***линейно независимые***.

**П**онятие линейной независимости между векторами используется для алгебраической характеристики взаимного расположения векторов в пространстве.

**Определение 3.2** Два ненулевых вектора  и  называются ***коллинеарными*** (обозначают  ), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

**К**оллинеарные векторы могут быть одинаково направленными (как векторы  и  ) или противоположно направленными (векторы  и  (рис 3.8)).



**Теорема 3.1**Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.



**Следствие.** Если между двумя неколлинеарными векторами выполняется равенство

 ,

то оба коэффициента должны равняться нулю  .

**Определение 3.3** Ненулевые векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

**Л**юбые ***два вектора всегда компланарны***, а три вектора могут и не быть компланарными.

**Теорема 3.2** Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

 - коллинеарны  (3.3)

**П**редставление вектора  в виде линейной комбинации векторов  и  по (3.3) называется разложением  на плоскости по двум неколлинеарным векторам.

**Р**ассмотрим произвольный вектор  и тройку некомпланарных векторов  .

**Теорема 3.3**Каждый вектор  единственным образом разлагается по трем некомпланарным векторам  , т.е. представляется в виде

 (3.4)

**И**з (3.4) следует, что ***любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы***.

**У**порядоченная тройка некомпланарных (линейно независимых) векторов  называется ***базисом во множестве геометрических векторов пространства***. Скалярные коэффициенты  однозначно определяются и называются ***координатами вектора***  относительно базиса  .

**А**налогично: упорядоченная пара  неколлинеарных (линейно независимых) векторов образует базис геометрических векторов на плоскости. Коэффициенты  в разложении (3.4) есть координаты вектора  относительно базиса 

**ЗАДАНИЯ:**

1. Законспектировать данный материал.

2. Нарисовать 5 произвольных векторов, построить сумму 2-х векторов

по правилу треугольника и по правилу параллелограмма, построить вектор суммы 5 векторов по правилу многоугольника, построить вектор разности любых двух векторов.

Конспект и практическое задание выслать по эл. адресу**:** **zinevich1957@mail.ru**до 27 марта 12020 года